



5. Curvas

5.2. Curvas cíclicas

►►► Trazado de las cicloides acortada y alargada

Estas curvas se generan a partir de la cicloide normal, y el punto que describe la trayectoria está unido solidariamente a la ruleta.

Cuando el punto es interior surge la cicloide **acortada**, y si es exterior surge la **alargada**.

Tanto en la cicloide alargada como en la acortada, el punto generador P_0 se llama **paso**.

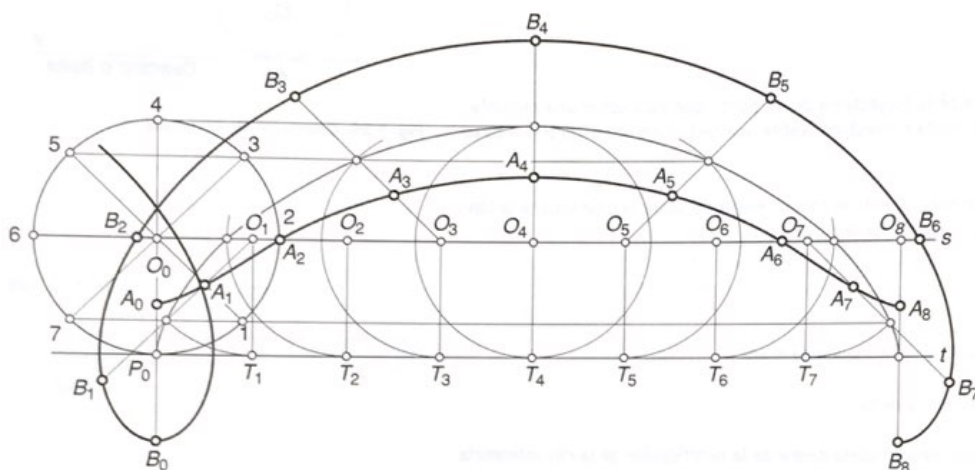


Fig. 5.41. Trazado de cicloides alargada y acortada.

En las curvas cíclicas alargadas, el final de una **arcada** con el principio de la siguiente, forman el llamado **lazo de alargada**. Para dibujarlas trazamos los radios que contenían a P en las diferentes posiciones en las que nos hemos basado para dibujar la normal, y sobre ellos van a estar los nuevos puntos que describirán la curva.

En el caso de la alargada, los puntos están en la prolongación del radio, siendo P_0B_0 el paso. Véase en la Figura 5.41 el movimiento que describe B .

Para la acortada, que hemos representado con el punto A , los tomaremos en el radio.

►►► B. Epicicloide

►►► Definición

Se llama **epicicloide** a la curva plana que describe un punto P de una circunferencia ruleta que rueda sin resbalar sobre otra circunferencia fija, manteniéndose tangente exterior a ella (Fig. 5.42).

Podemos encontrar variantes según sea la ruleta:

- **Radio menor que la circunferencia base.** Cuando el radio es justo la mitad del radio de la base a la curva que surge se le llama **nefroide** (Fig. 5.43).

- **Radio igual que la base.** En este caso, a la curva que surge se le llama **cardioide** (Fig. 5.44).

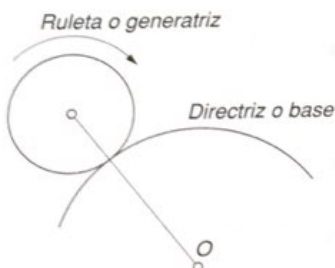


Fig. 5.42. Generación de la epicicloide.

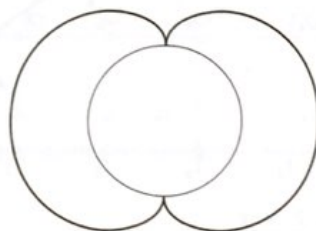


Fig. 5.43. Nefroide.

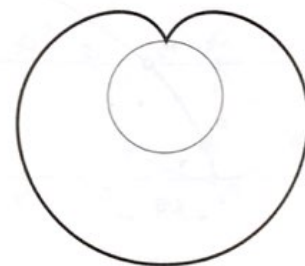


Fig. 5.44. Cardioide.



- **Radio mayor que la base.** Se la conoce como **lumaca de Pascal**.
- **Radio infinito,** por lo que la circunferencia degenera en una recta. Este caso es el que conocemos como la **evolvente de la circunferencia** (Fig. 5.45).



Fig. 5.45. Evolvente.

►►► Trazado de la epicicloide

Tomamos el primer caso citado, en el que la ruleta tiene una radio menor que la base, y su trazado nos sirve para los siguientes casos excepto el de la evolvente, que lo estudiaremos en particular.

1. Primero vamos a determinar, en la circunferencia base, el arco que abarca el perímetro de la circunferencia ruleta al dar una vuelta completa. Esta operación la resolvemos mediante una regla de tres. Si llamamos R al radio de la circunferencia base y r al radio de la circunferencia ruleta podemos establecer que, si $2\pi R$ recorre 360° , $2\pi r$ recorrerá x , arco buscado.

$$\frac{2\pi R}{360^\circ} = \frac{2\pi r}{x} \quad x = \frac{r \cdot 360^\circ}{R}$$

2. Ahora dividimos la circunferencia ruleta y el arco en el mismo número de partes.
3. Situamos los centros de las circunferencias tangentes en cada momento del movimiento y determinamos los puntos P que van a determinar la curva, de forma similar a como hemos procedido en la cicloide (Fig. 5.46).

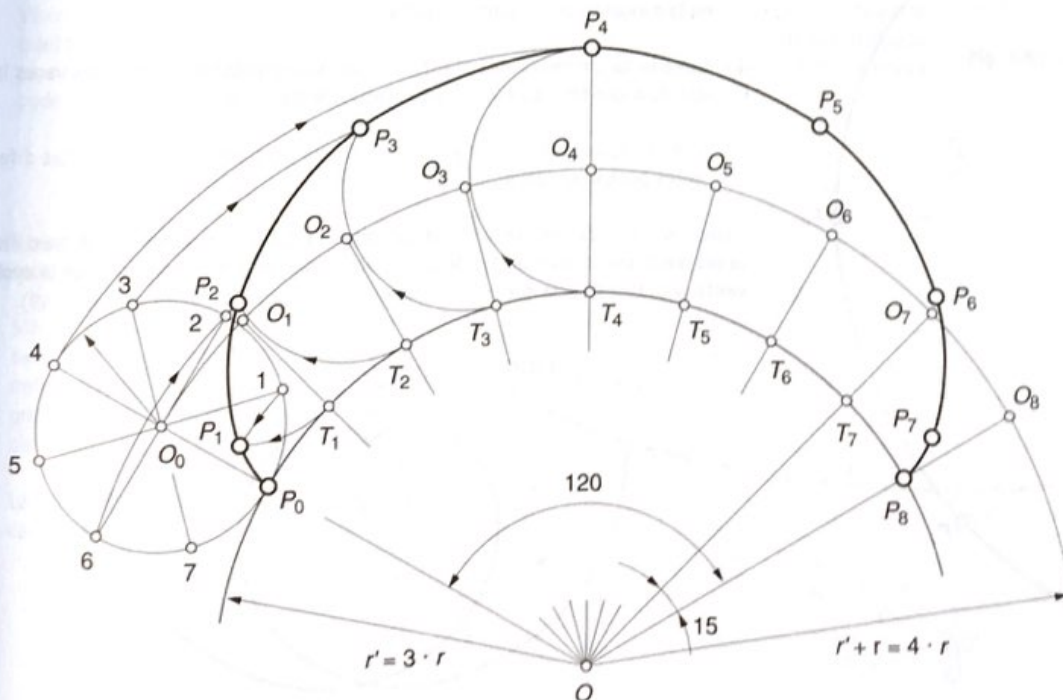


Fig. 5.46. Trazado de la epicicloide.



También podemos trazar las evolventes **alargada** y **acortada** de la misma forma en que las hemos realizado anteriormente.

La **espiral de Arquímedes**, estudiada en Primer Curso, es un caso especial de evolvente alargada cuyo punto inicial coincide con el centro de la circunferencia base (Fig. 5.50).

►► C. Hipocicloide

►►► Definición

Se llama hipocicloide a la curva plana que describe un punto P de una circunferencia ruleta que rueda sin resbalar sobre otra circunferencia fija, manteniéndose tangente interior a ella (Fig. 5.51).

Podemos encontrarnos variantes según sea la ruleta:

- Si el radio de la ruleta es igual al radio de la directriz, la curva se llama **Caracol de Pascal**.
- Si el radio de la ruleta es $1/3$ del de la base, cuando la ruleta recorre toda la directriz el punto generador P_0 habrá descrito tres arcadas, determinándose una hipocicloide **triangular, tricuspídal o de Cremona**.
- Si el radio de la ruleta es $1/4$ del de la base, cuando la ruleta recorre toda la directriz el punto generador P_0 habrá descrito cuatro arcadas, determinando la hipocicloide **cuadrangular o Astroide**.

►►► Trazado de la hipocicloide

El proceso de trazado es el que recoge la Figura 5.52:

1. Vamos a determinar, en la circunferencia base, el arco que abarca el perímetro de la circunferencia ruleta al dar una vuelta completa, y lo resolvemos con la misma regla de tres que hemos utilizado para la epicicloide. Si R es el radio de la circunferencia base y r el radio de la circunferencia ruleta podemos establecer que, si $2\pi R$ recorre 360° , $2\pi r$ recorrerá x , arco buscado.

$$\frac{2\pi R}{360^\circ} = \frac{2\pi r}{x} \quad x = \frac{r \cdot 360^\circ}{R}$$

2. Ahora dividimos la circunferencia ruleta y el arco en el mismo número de partes.
3. Situamos los centros de las circunferencias tangentes en cada momento del movimiento y determinamos los puntos P que van a configurar la curva, de igual forma que en la epicicloide.
4. La curva queda dibujada al unir los puntos en cada posición.

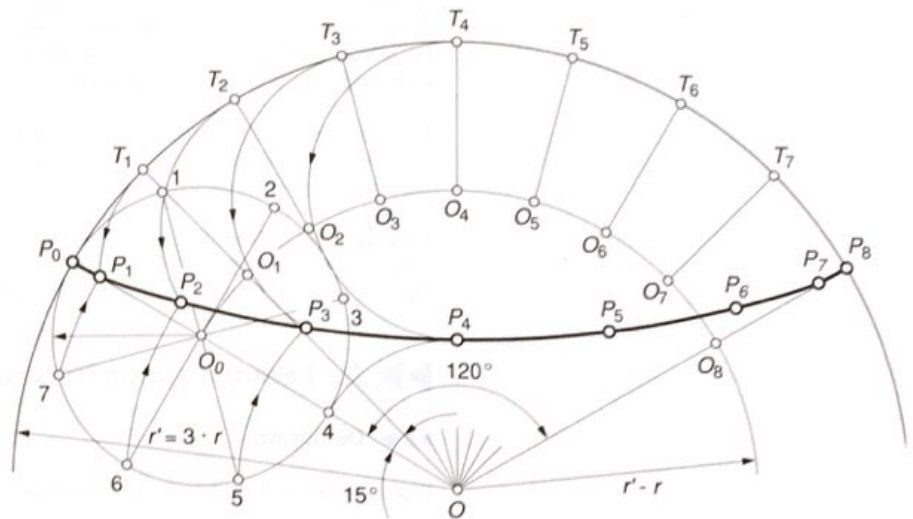


Fig. 5.52. Trazado de la hipocicloide.

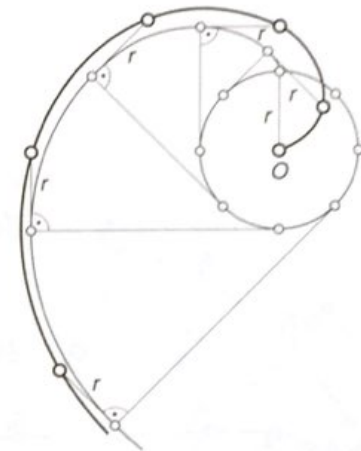


Fig. 5.50. Espiral de Arquímedes o evolvente alargada.

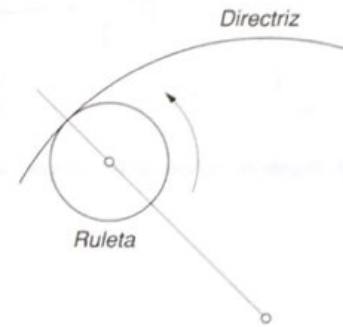


Fig. 5.51. Generación de la hipocicloide.